

Un cycle limite d'un système planaire perturbé contrôlé

Elbahi Hadidi et Nadjat Stihi

Univ Badji Mokhtar, Annaba - Faculté des Sciences -
Département de Mathématiques & L.M.A Laboratoire
email : ehadidi71@yahoo.fr

Identification and Control : Somes new Challenges.
18-20 Juin 2019
Monastir, Tunisie.

Plan de travail

➊ Historique et Motivation.

Plan de travail

- 1 Historique et Motivation.
- 2 Notions préliminaires.

Plan de travail

- 1 Historique et Motivation.
- 2 Notions préliminaires.
- 3 **Cycle limite pour certain système planaire perturbé.**

Plan de travail

- 1 Historique et Motivation.
- 2 Notions préliminaires.
- 3 Cycle limite pour certain système planaire perturbé.
 - 1 Position du problème.

Plan de travail

- 1 Historique et Motivation.
- 2 Notions préliminaires.
- 3 Cycle limite pour certain système planaire perturbé.
 - 1 Position du problème.
 - 2 **Résultats principaux.**

Plan de travail

- ① Historique et Motivation.
- ② Notions préliminaires.
- ③ Cycle limite pour certain système planaire perturbé.
 - ① Position du problème.
 - ② Résultats principaux.
- ④ Application et simulation.

Plan de travail

- 1 Historique et Motivation.
- 2 Notions préliminaires.
- 3 Cycle limite pour certain système planaire perturbé.
 - 1 Position du problème.
 - 2 Résultats principaux.
- 4 Application et simulation.
- 5 Conclusion et perspectives.

Plan de travail

- 1 Historique et Motivation.
- 2 Notions préliminaires.
- 3 Cycle limite pour certain système planaire perturbé.
 - 1 Position du problème.
 - 2 Résultats principaux.
- 4 Application et simulation.
- 5 Conclusion et perspectives.
- 6 **Bibliographie.**

Historique et Motivation

Historique et Motivation

- Henri Poincaré 1882 a introduit la notion de cycle limite pour une EDO.
- David Hilbert 1900 a posé 23 problèmes, 2^{ème} partie du 16^{ème} problème c'est la recherche du nombre maximum de cycles limites pour un système planaire polynomiaux autonome.

Historique et Motivation

Historique et Motivation

- Yeong-Jeu Sun en 2002, 2007, 2008 et 2009 a étudié l'existence d'un cycle limite pour un système perturbé planaire contrôlé.
- Hanane Damak et Mohamed Ali Hammami et Yeong-Jeu Sun 2012 ont étudié l'existence d'un cycle limite pour certain système perturbé planaire contrôlé.
- Pour cela, nous nous sommes intéressés par ce type de systèmes planaires perturbés et en particulier par la recherche des solutions périodiques.

- 1 Historique et Motivation
- 2 Notions préliminaires
 - Système dynamique
 - Point d'équilibre
 - Linéarisation
 - Solution périodique
 - Cycle limite
- 3 Cycle limite pour certain système planaire perturbé
 - Position du problème
 - Résultats principaux
- 4 Application et simulation
 - Exemple 1
 - Exemple 2
- 5 Conclusion et perspectives
- 6 Bibliographie

Notions Préliminaires

Système dynamique

Définition

Un **système dynamique** sur \mathbb{R}^n est une application

$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- 1) $U(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue par rapport à t .
- 2) $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue par rapport à x .
- 3) $U(0, x) = x$.
- 4) $U(t + s, x) = U(t, U(s, x)) \forall t, s \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Notions Préliminaires

Point d'équilibre

Définition

On appelle **point d'équilibre** d'un système différentiel non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) = 0$

Notions Préliminaires

Linéarisation

Définition

Soit le système différentiel non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Son point d'équilibre est x_0 et le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \text{ où } A = Df(x_0). \quad (1.3)$$

Le système (1.3) est **linéarisé** du système (1.2) au voisinage de x_0 .

Notions Préliminaires

Solution périodique

Définition

Une solution périodique $(x(t), y(t))$ de période T est une solution telle que :

$$\forall t > 0 \quad (x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)) \text{ pour certain } T > 0 \quad (1.4)$$

Notions Préliminaires

Solution périodique

Définition

Une solution périodique $(x(t), y(t))$ de période T est une solution telle que :

$$\forall t > 0 \quad (x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)) \text{ pour certain } T > 0 \quad (1.4)$$

Remarque

Toute solution périodique correspond à une orbite fermée dans l'espace des phases.

Notions Préliminaires

Cycle limite

Définition

Un cycle limite est une orbite fermée isolée, c'est à dire au voisinage de cette orbite, on ne peut pas avoir une autre orbite fermée.

- 1 Historique et Motivation
- 2 Notions préliminaires
 - Système dynamique
 - Point d'équilibre
 - Linéarisation
 - Solution périodique
 - Cycle limite
- 3 Cycle limite pour certain système planaire perturbé
 - Position du problème
 - Résultats principaux
- 4 Application et simulation
 - Exemple 1
 - Exemple 2
- 5 Conclusion et perspectives
- 6 Bibliographie

Cycle limite pour certain système planaire perturbé

Position du problème

Nous considérons le système de contrôle planaire perturbé suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)B(\varepsilon)x(t), \forall t \geq t_0 \geq 0, (1)$$

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} \text{ où } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R},$$

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad B(\varepsilon) = \begin{bmatrix} -1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & -1 + \varepsilon \end{bmatrix}$$

Cycle limite pour certain système planaire perturbé

Position du problème

avec $a > 0, \varepsilon \neq 1$ et $x(t_0) \neq 0$. Spécialement, la fonction de contrôle est donnée par :

$$u(t) = (1 - \varepsilon)\bar{r}(x_1^2(t) + x_2^2(t)), \quad \text{avec } \bar{r} > 0. (2)$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -bx_2(t) - (-1 + \varepsilon)^2\bar{r}x_1(t)[x_1^2(t) + x_2^2(t) - \frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2\bar{r}}] \\ \dot{x}_2(t) = bx_1(t) - (-1 + \varepsilon)^2\bar{r}x_2(t)[x_1^2(t) + x_2^2(t) - \frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2\bar{r}}] \end{cases} \quad \forall t \geq t_0 (3)$$

Cycle limite pour certain système planaire perturbé

Résultats principaux

Proposition

L'origine $(0,0)$ est un point d'équilibre instable du système étudié.

Définition

La variété fermée et bornée $s(x) = 0$, dans le plan $x_1 - x_2$, est considérée comme un cycle limite, est dite exponentiellement stable s'il existe un nombre strictement positif α tel que la variété de $s(x) = 0$ le long des trajectoires du système (3) satisfait l'inégalité suivante :

$$|s(x(t))| \leq |s(x(t_0))| \exp[-\alpha(t - t_0)], \quad \forall t \geq t_0 \geq 0.$$

Dans ce cas, le nombre α est appelé le taux de convergence.

Cycle limite pour certain système planaire perturbé

Résultats principaux

Théorème

Pour le système (3), toutes les trajectoires convergent vers le cycle limite exponentiellement stable dans le plan $x_1 - x_2$, suivant :

$$s(x) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}},$$

avec le taux de convergence est :

$$\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } x_{01}^2 + x_{02}^2 = \frac{a}{(-1+\varepsilon)^2 \bar{r}} \\ 2a & \text{si } x_{01}^2 + x_{02}^2 > \frac{a}{(-1+\varepsilon)^2 \bar{r}} \\ 2a(-1 + \varepsilon)^2(x_{01}^2 + x_{02}^2) & \text{si } x_{01}^2 + x_{02}^2 < \frac{a}{(-1+\varepsilon)^2 \bar{r}} \end{cases}$$

En outre les trajectoires sont $(x_1(t), x_2(t))$ avec :

Cycle limite pour certain système planaire perturbé

Résultats principaux

Théorème (La Suite)

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}} \cos[b(t - t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)]$$

et

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}} \sin[b(t - t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)]$$

le taux de convergence est $\frac{\alpha}{2}$.

Preuve

Nous définissons une variété lisse $s(x) = 0$ et une fonction continue :

$$\theta(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

Preuve (La Suite)

avec :

$$s(x) = x^T x - \frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}.$$

Ensuite, les dérivées de $s^2(x)$ et $\theta(x)$ par rapport à t le long des trajectoires du système (3) sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s^2(x(t)) &= 2s(x(t))(2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2) \\ &= -4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r} (x_1^2 + x_2^2) s^2(x(t)), \quad (4) \end{aligned}$$

et

$$\frac{d}{dt} \theta(x(t)) = \frac{\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} = b, \quad (5)$$

ce qui implique que :

$$\theta(x(t)) = b(t - t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right). \quad (6)$$

Preuve (La Suite)

Par la suite, il y a trois cas pour étudier le comportement des trajectoires par rapport au cycle limite ($s(x) = 0$) du système (3).

Lorsque :

$$x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) = \frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}} \quad (s(x(t_0)) = 0).$$

Et d'après (4), on trouve :

$$\frac{d}{dt} s^2(x(t)) = -4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r} (x_1^2 + x_2^2) s^2(x(t)),$$

donc on a :

$$\frac{d}{s^2(x(t))} s^2(x(t)) = -4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r} (x_1^2 + x_2^2),$$

on pose :

$$U(t) = s^2(x(t)),$$

Preuve (La Suite)

on intègre

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{s^2(x(t))} s^2(x(t)) = \int_{t_0}^t -4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_1^2 + x_2^2) dt,$$

cela implique que :

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{U(t)} U(t) = \int_{t_0}^t -4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_1^2 + x_2^2) dt$$

\Rightarrow

$$\ln(U(t)) - \ln(U(t_0)) = -4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_1^2 + x_2^2)(t - t_0)$$

\Rightarrow

$$\ln(U(t)) = C - 4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_1^2 + x_2^2)(t - t_0)$$

$$U(t) = K \exp[(-4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_1^2 + x_2^2)(t - t_0))]$$

$$s^2(x(t)) = K \exp[(-4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_1^2 + x_2^2)(t - t_0))],$$

Preuve (La Suite)

$$s(x(t)) = \sqrt{K} \exp[(-2(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_1^2 + x_2^2))(t - t_0)],$$

et on a la condition suivante :

$$s(x(t_0)) = 0.$$

On détermine la constante K , en substituant la condition dans la formule on obtient

$$\begin{aligned} s(x(t_0)) &= \sqrt{K} \exp[(-2(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_1^2 + x_2^2))(t_0 - t_0)] \\ &= \sqrt{K} \exp(0) = \sqrt{K} = 0, \end{aligned}$$

cela implique que $K = 0$,
donc

$$s(x(t)) = 0.$$

$$\frac{d}{dt} s^2(x(t)) = 0,$$

Preuve (La Suite)

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = \frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}. \quad (7)$$

Par conséquent, nous obtenons les trajectoires $(x_1(t), x_2(t))$:

$$x_1(t) = \sqrt{\frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}} \cos[b(t - t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)], \quad \forall t \geq t_0, \quad (8)$$

et

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}} \sin[b(t - t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)], \quad \forall t \geq t_0, \quad (9)$$

et

$$s(x(t)) = 0. \quad (10)$$

Preuve (La Suite)

Lorsque :

$$x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) > \frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}} \quad (s(x(t_0)) > 0).$$

Et d'après (4) on trouve :

Preuve (La Suite)

$$\frac{d}{dt}s^2(x(t)) \leq -4as^2(x(t)).$$

Posons :

$$U(t) = s^2(x(t)).$$

On trouve :

$$\frac{d}{dt}U(t) \leq -4aU(t),$$

Par conséquent

$$\int_{t_0}^t \frac{dU(t)}{U(t)} \leq \int_{t_0}^t -4adt,$$

on trouve :

$$U(t) \leq U(t_0)\exp[(-4a(t - t_0))], \quad \forall t \geq t_0.$$

Cela implique que :

Preuve (La Suite)

$$s^2(x(t)) \leq |s^2(x(t_0))| \exp[(-4a(t - t_0))], \quad \forall t \geq t_0.$$

Puis on trouve :

$$s(x(t)) \leq |s(x(t_0))| \exp[(-2a(t - t_0))], \quad \forall t \geq t_0.$$

Donc, on a :

$$|\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - \sqrt{\frac{a}{(-1+\varepsilon)^2 \bar{r}}}|^2 \leq |s(x(t_0))| \exp[(-2a(t - t_0))].$$

Ce qui implique que :

$$|\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - \sqrt{\frac{a}{(-1+\varepsilon)^2 \bar{r}}}| \leq \sqrt{|s(x(t_0))|} \exp[(-a(t - t_0))] \quad .(11)$$

En utilisant (6) et (11) on obtient les estimations suivantes :

Preuve (La Suite)

$$|x_1(t) - \sqrt{\frac{a}{(-1+\varepsilon)^2\bar{r}}} \cos[b(t-t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)]| \leq \sqrt{s(x(t_0))} \exp[(-a(t-t_0))], \quad \forall t \geq t_0,$$

et

$$|x_2(t) - \sqrt{\frac{a}{(-1+\varepsilon)^2\bar{r}}} \sin[b(t-t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)]| \leq \sqrt{s(x(t_0))} \exp[(-a(t-t_0))], \quad \forall t \geq t_0.$$

Lorsque :

$$x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) < \frac{a}{(-1+\varepsilon)^2\bar{r}} \quad (s(x(t_0)) < 0).$$

Et d'après (4) on trouve :

$$\frac{d}{dt} s^2(x(t)) \leq -4(-1+\varepsilon)^2\bar{r}(x_{01}^2 + x_{02}^2) s^2(x(t)).$$

Preuve (La Suite)

Posons :

$$U(t) = s^2(x(t)),$$

on trouve :

$$\frac{d}{dt}U(t) \leq -4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_{01}^2 + x_{02}^2)U(t).$$

Par conséquent :

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{U(t)}U(t) \leq \int_{t_0}^t -4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_{01}^2 + x_{02}^2)dt.$$

alors on a :

$$U(t) \leq U(t_0) \exp[(-4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_{01}^2 + x_{02}^2))(t - t_0)], \quad \forall t \geq t_0.$$

Preuve (La Suite)

Cela implique que

$$s^2(x(t)) \leq |s^2(x(t_0))| \exp[(-4(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_{01}^2 + x_{02}^2)(t - t_0))], \quad \forall t \geq t_0.$$

Puis

$$s(x(t)) \leq |s(x(t_0))| \exp[(-2(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_{01}^2 + x_{02}^2)(t - t_0))], \quad \forall t \geq t_0.$$

donc, on trouve

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - \sqrt{\frac{a}{(-1+\varepsilon)^2 \bar{r}}} \right|^2 \leq \\ & |s(x(t_0))| \exp[(-2(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_{01}^2 + x_{02}^2)(t - t_0))], \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} - \sqrt{\frac{a}{(-1+\varepsilon)^2 \bar{r}}} \right| \leq \\ & \sqrt{|s(x(t_0))|} \exp[(-(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}(x_{01}^2 + x_{02}^2)(t - t_0))], \quad \forall t \geq t_0. \quad (12) \end{aligned}$$

En utilisant (6) et (12) on obtient les estimations suivantes :

Preuve (La Suite)

$$\begin{aligned} & |x_1(t) - \sqrt{\frac{a}{(-1+\varepsilon)^2\bar{r}}} \cos[b(t-t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)]| \\ & \leq \sqrt{|s(x(t_0))|} \exp[(-(-1+\varepsilon)^2\bar{r}(x_{01}^2 + x_{02}^2)(t-t_0))], \quad \forall t \geq t_0, \\ \text{et } & |x_2(t) - \sqrt{\frac{a}{(-1+\varepsilon)^2\bar{r}}} \sin[b(t-t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)]| \\ & \leq \sqrt{|s(x(t_0))|} \exp[(-(-1+\varepsilon)^2\bar{r}(x_{01}^2 + x_{02}^2)(t-t_0))], \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Remarque

D'après le théorème, ce système planaire peut être représenté comme des oscillateurs non linéaires avec l'amplitude $\sqrt{\frac{a}{(-1+\varepsilon)^2 \bar{r}}}$ et la fréquence b . Ces oscillations sont généralement indépendantes de la condition initiale et les cycles limites de ces oscillations ne sont pas influencés par une petite paramètre.

- 1 Historique et Motivation
- 2 Notions préliminaires
 - Système dynamique
 - Point d'équilibre
 - Linéarisation
 - Solution périodique
 - Cycle limite
- 3 Cycle limite pour certain système planaire perturbé
 - Position du problème
 - Résultats principaux
- 4 **Application et simulation**
 - Exemple 1
 - Exemple 2
- 5 Conclusion et perspectives
- 6 Bibliographie

Application et simulation

Exemple 1

Considérons le système de contrôle planaire suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + u(t) \begin{bmatrix} -1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & -1 + \varepsilon \end{bmatrix} x(t), \forall t \geq 0 \quad (16)$$

avec l'état initiale : $\begin{cases} x_1(t_0) = -2 + 6\varepsilon \\ x_2(t_0) = 2 - 2\varepsilon \end{cases}$.

Pour $\varepsilon = 0$.

On peut obtenir comme dans (Y. J. Sun en 2008) [7], donc (16) devient

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + u(t) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t), \forall t \geq 0. \quad (17)$$

Application et simulation

Exemple 1 (La suite)

En utilisant le théorème avec la fonction de contrôle suivante :

$$u(t) = 5x_1^2(t) + 5x_2^2(t)$$

et $x(0) = [-2 \ 2]^T$, nous concluons que les trajectoires du système (17) tendent vers le cycle limite exponentiellement stable,

on a
$$s(x) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}.$$

donc

$$s(x) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{5}.$$

Dans le but de déterminer la valeur de α nous testons la somme de la condition initiale

$$x_{01}^2 + x_{02}^2 = (-2)^2 + (2)^2 = 8 \text{ et } \frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}} = \frac{3}{5}.$$

Application et simulation

Exemple 1 (La suite)

Ce qui implique que $\alpha = 2a = 6$.

Les trajectoires sont :

$$\begin{cases} x_1(t) = \sqrt{\frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}} \cos[b(t - t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)] \\ x_2(t) = \sqrt{\frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}} \sin[b(t - t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \sqrt{\frac{3}{5}} \cos\left[2t + \frac{3\pi}{4}\right] \\ x_2(t) = \sqrt{\frac{3}{5}} \sin\left[2t + \frac{3\pi}{4}\right] \end{cases}$$

Avec le taux de convergence garantie est $\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{2} = 3$

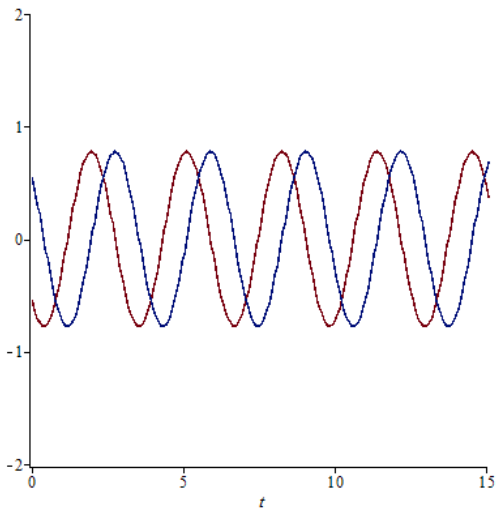


FIG.: x_1 et x_2 du système contrôlé pour $\varepsilon = 0$.

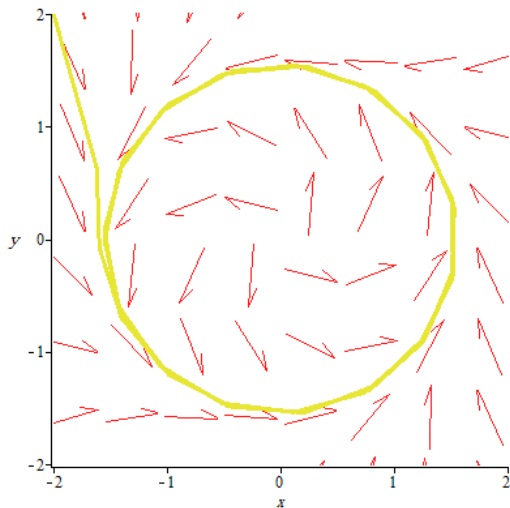


FIG.: Les trajectoires du système contrôlé pour $\varepsilon = 0$.

Application et simulation

Exemple 2

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + u(t) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t), \forall t \geq 0. \quad (18)$$

En utilisant le théorème avec la fonction de contrôle suivante :

$$u(t) = \frac{5}{2}x_1^2(t) + \frac{5}{2}x_2^2(t)$$

et $x(0) = [1 \ 1]^T$, nous concluons que les trajectoires du système (18) tendent vers le cycle limite exponentiellement stable

on a
$$s(x) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}.$$

Application et simulation

Exemple 2 (La suite)

Donc

$$s(x) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{12}{5}.$$

Dans le but de déterminer la valeur de α nous testons la somme de la condition initiale

$$x_{01}^2 + x_{02}^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2 \text{ et } \frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}} = \frac{12}{5}.$$

Ce qui implique que $\alpha = 2a(-1 + \varepsilon)^2(x_{01}^2 + x_{02}^2) = 3$.

Les trajectoire sont :

$$\begin{cases} x_1(t) = \sqrt{\frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}} \cos[b(t - t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)] \\ x_2(t) = \sqrt{\frac{a}{(-1 + \varepsilon)^2 \bar{r}}} \sin[b(t - t_0) + \tan^{-1}\left(\frac{x_{02}}{x_{01}}\right)] \end{cases}$$

Application et simulation

Exemple 2 (La suite)

$$\begin{cases} x_1(t) = 2\sqrt{\frac{3}{5}}\cos[2t + \frac{\pi}{4}] \\ x_2(t) = 2\sqrt{\frac{3}{5}}\sin[2t + \frac{\pi}{4}] \end{cases}$$

Avec le taux de convergence garantie est $\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}$

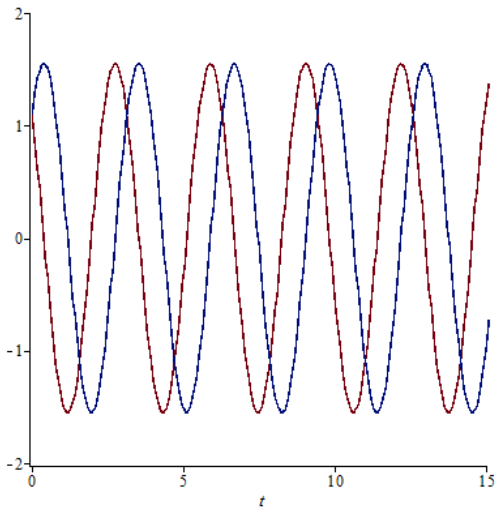


FIG.: x_1 et x_2 du système contrôlé pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

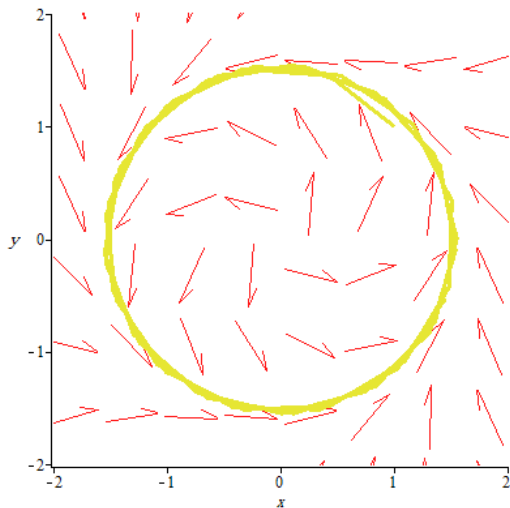


FIG.: Les trajectoires du système contrôlé pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Nous avons prouvé l'existence d'un cycle limite exponentiellement stable pour un système planaire perturbé contrôlé. En suite nous avons consolidé ce travail par des applications et des simulations avec maple.







Conclusion et perspectives




Perspectives

Nous avons comme perspectives pour la recherche des solutions périodiques :

- 1) En premier lieu, application de cette technique pour des systèmes généralisés.
 - a) Dans la matrice A ou $B(\varepsilon)$.
 - b) Dans la fonction de contrôle $u(t)$.
- 2) D'autre part, applications d'autres méthodes pour ce type de systèmes planaires perturbés.

Bibliographie

-  T.M. Apostol : Mathematical Analysis. Addison-Wesley, 1957.
-  L. Iannelli, K.H. Johansson, U. Jonsson, and F. Vasca : Dither for smoothing relay feedback systems. IEEE Trans. Circuits and Systems, Part I 50 (2003), 8, 1025-1035.
-  H.K. Khalil : Nonlinear Systems. Prentice-Hall, New York 2002.
-  A.I. Mees : Limit cycles stability. IMA J. Appl. Math. 11 (1972), 3, 281-295.
-  R. Miller, A. Michel, and G.S. Krenz : On the stability of limit cycles in nonlinear feedback systems : analysis using describing functions. IEEE Trans. Circuits and Systems 30 (1983), 9, 684-696.
-  Y. J. Sun : Limit cycles design for a class of bilinear control systems. Chaos, Solitons and Fractals 33 (2007), 156-162.

-  Y. J. Sun : Existence and uniqueness of limit cycle for a class of nonlinear discrete-time systems. *Chaos, Solitons and Fractals* 38 (2008), 89-96.
-  Y. J. Sun : The existence of the exponentially stable limit cycle for a class of nonlinear systems. *Chaos, Solitons and Fractals* 39 (2009), 2357-2362.
-  L. Perko : *Differential equations and dynamical systems*, Springer (2000) .

Merci pour votre attention.