Existence de Solutions au problème de Neumann faisant intervenir plusieurs exposants critiques.

Yamina HAMZAOUI

Ecole Supérieure d'Economie a Oran
Département de Mathématique

Juin 2019. Identification and Control: Some Challenges

Plan de Travail

1. Introduction.

Plan de Travail

1. Introduction.
2. Brief historique

Plan de Travail

1. Introduction.
2. Brief historique
3. Existence de Solution Positive.

Plan de Travail

1. Introduction.
2. Brief historique
3. Existence de Solution Positive.
4. Existence de solution qui change de signe

Problème de Neumann avec poids et des nonlinéarités critiques multiple.

Nous considérons le problème suivant:

$$\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)\begin{cases} -\operatorname{div}\left(p\left(x\right)\nabla u\right) = au + bv + \eta\left|u\right|^{2^{*}-2}u & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div}\left(p\left(x\right)\nabla v\right) = bu + cv + \eta\left|v\right|^{2^{*}-2}v & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha Q\left(x\right)\left|u\right|^{\alpha-2}u\left|v\right|^{\beta} & \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = \beta Q\left(x\right)\left|u\right|^{\alpha}\left|v\right|^{\beta-2}v & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$ avec de bord régulier $\partial\Omega$, $N \geq 3$; p, Q sont des poids positifs, continus et définis sur $\bar{\Omega}$, $\partial\Omega$ respectivement tel que $p \in H^1(\Omega)$; a, b et c sont des paramétres réels; η est une constante réelle non négative, α, $\beta > 1$ tel que $\alpha + \beta = 2_*$. Ici $2_* = \frac{2(N-1)}{N-2}$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Introduction

- Introduction.

Brief historique

Adimurthi and G. Mancini, Nonlinear analysis: A tribute in honour of G. Prodi, Pisa 9 (1991)

X. J. Wang, J. Differ. Equations: Neumann Problem of Semilinear elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents (1991)

$$\left(\mathcal{P}^{(p,Q)}\right)\begin{cases} -\operatorname{div}\left(p\left(x\right)\nabla u\right) = \lambda u + \eta\left|u\right|^{q-2}u & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = Q\left(x\right)\left|u\right|^{2_*-2}u & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

ou $p = 1 = \eta$, $Q = 0$

Existence de solution positive pour λ suffisement grand

$\partial\Omega$ satisfait les condition géométrique à un certain point sur $\partial\Omega$ et la courbure moyenne en ce point est positive.

H. Yazidi, Proc. Roy. Soc. On some nonlinear Neumann problem with weight and with critical Sobolev trace maps (2007)

$p \neq 1$, $q < 2_*$ et sous certaine condition sur P et Q

$\{\lambda_{k,p}\}$ la suite des valeurs propre pour $-\operatorname{div}(p(x)\nabla .)$ avec condition au bord de Neumann.

Si l'une des conditions suivante est satisfaite:

$N \geq 3$, $\lambda < 0$ et $\eta \in \mathbb{R}$.

$N \geq 3$, $\lambda_{k,p} < \lambda < \lambda_{k+1,p}$ et $\eta \geq 0$.

alors le problème admet une solution.

Le but de ce travail est de généraliser le problème de Yazidi a un système et d'étendre le cas sous critique au cas critique.

Condition géomètrique

Definition

On dit que $\partial\Omega$ satisfait les conditions géométriques (c.g) au point $x_0 \in \partial\Omega$, s'il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 tel que $\Omega \cap U(x_0)$ est situé sur un côté du plan tangent au point x_0

Notre système peut s'écrire sous forme vectoriel comme

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(p\left(x\right)\nabla U\right) = AU + \frac{\eta}{2^*}\nabla H_1\left(U\right) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = Q\left(x\right)\nabla H_2\left(U\right) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propre μ_1, μ_2, $H_1\left(U\right) = \left|u\right|^{2^*} + \left|v\right|^{2^*}$ et $H_2\left(U\right) = \left|u\right|^{\alpha}\left|v\right|^{\beta}$.

Remarque

Dans notre travail, nous distinguons deux possibilités

$(\mathcal{A}_1)$ $ac - b^2 > 0$, $a + c < 0$ alors $\mu_1 \leq \mu_2 < 0$.

$(\mathcal{A}_2)$ $ac - b^2 > 0$, $a + c > 0$ alors $0 < \mu_1 \leq \mu_2$.

On travail dans l'espace $H = \left[H^1(\Omega)\right]^2$ muni de la norme

$$\|(u,\ v)\| = \left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ avec } \|w\| = \left(\int_\Omega \left(|\nabla w|^2 + w^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$S = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx;\ u \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right),\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = 1\right\}$$

$$S_1 = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}_+^N} |\nabla u|^2 \, dx;\ u \in H^1\left(\mathbb{R}_+^N\right),\ \int_{\partial\mathbb{R}_+^N} |u|^{2_*} ds_x = 1\right\}$$

sont atteintes par les fonctions

$$U(x) = \gamma_N \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{2-N}{2}} \text{ et } W(x) = c_N \left(\left|x'\right|^2 + (x_N + (N-2))^2\right)^{\frac{2-N}{2}}$$

$$S_{\alpha,\beta} = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right) dx; \; u, v \in H^1 \left(\mathbb{R}^N \right), \int_{\partial \mathbb{R}^N} |u|^\alpha |v|^\beta ds_x = 1\right.$$

la relation entre $S_{\alpha,\beta}$ et S_1 est

$$S_{\alpha,\beta} = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] S_1.$$

Existence de Solution Positive

Theorem (1)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, *un domaine borné tel que* $\partial\Omega$ *satisfait la* $(c.g)$ *en* y *et* $H(y) > 0$. *Supposons que* $(\mathcal{A}_1)$ *est vérifiée,* p *et* Q *satisfont*

$$\frac{p(y)}{(Q(y))^{N-2}} = \min_{x \in \partial\Omega} \frac{p(x)}{(Q(x))^{N-2}}, \tag{1}$$

$$|p(x) - p(y)| = o(|x-y|), \tag{2}$$

et

$$|Q(x) - Q(y)| = o(|x-y|), \tag{3}$$

respectivement pour x *voisin de* y, *avec* $o(|x-y|) \to 0$ *quand* $x \to y$.
Alors, le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ *admet une solution.*

On définit la fonctionelle d'énergie J_η

$$\begin{aligned} J_\eta(u,\ v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(p(x)\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right)-(AU,\ U)\right)dx \\ &\quad -\frac{\eta}{2^*}\int_\Omega \left(|u|^{2^*}+|v|^{2^*}\right)dx-\int_{\partial\Omega} p(x)\,Q(x)\,|u|^\alpha\,|v|^\beta\,ds_x \end{aligned}$$

$J_\eta \in C^1(H,\ \mathbb{R})$.

Lemme du Col d'Ambrosetti-Rabinowitz

Lemma

Soit $J_\eta \in C^1$ *dans* H *qui vérifie la condition de Palais-Smale. Supposons qu'il existe un voisinage* V *de* 0 *dans* H *et des constantes positives* ρ *et* a *tel que*

$$(i)\ \ J_\eta\left(u,\ v\right) \geq \rho \text{ pour tout } \left(u,\ v\right) \text{ dans un voisinage de } V$$

$$(ii)\ \ J_\eta\left(0,\ 0\right) = 0 \text{ et } J_\eta\left(\varphi,\ \psi\right) < a \text{ pour } \left(\varphi,\ \psi\right) \notin \overline{V}.$$

Alors J_η *possède une valeur critique* c *telle que* $c \geq a$*, c'est à dire si on pose*

$$c = \inf_{\phi \in \Gamma} \max_{t \in [0,\ 1]} J_\eta\left(\phi\left(t\right)\right),$$

avec

$$\Gamma = \left\{\phi \in C\left(\left[0,\ 1\right],\ H\right) :\ \phi\left(0\right) = 0,\ \phi\left(1\right) = \left(\varphi,\ \psi\right)\right\}.$$

Alors c *est une valeur critique de* J_η*, et* $c \geq a$*.*

Lemma (1)

Pour tout $\eta \geq 0$ *fixé,* J_η *satisfait les* $(P - S)_c$ *avec*

$$c < c^* = \min (C, D), \tag{4}$$

où

$$C := \eta^{\frac{2-N}{2}} \frac{(p(y)S)^{\frac{N}{2}}}{2N}, \quad et \quad D := \frac{1}{N-2} \frac{p(y)}{(Q(y))^{N-2}} \left(\frac{1}{2_*} S_{\alpha,\beta} \right)^{N-1}.$$

(u_n, v_n) *est relativement compacte.*

Démonstration

Soit $\left(u_n,\ v_n\right)$ une suite de $\left(P-S\right)_c$ i.e

$$J_\eta\left(u_n,\ v_n\right)\longrightarrow c$$

$$J_\eta'\left(u_n,\ v_n\right)\longrightarrow 0.$$

On peut conclure que $\left\|\left(u_n,\ v_n\right)\right\|_H^2$ est bornée. Alors il existe une sous suite $\left(u_n,\ v_n\right)$ tel que

$$\left(u_n,\ v_n\right)\rightharpoonup\left(u,\ v\right)\ \text{dans}\ H.$$

Par le principe de concentration par compacité de Lions, on aboutit au résultat.

Lemma (2)

Sous les hypothèses du Théorème, il existe $(\widetilde{u},\ \widetilde{v}) \in H \setminus \{(0,\ 0)\}$ *tel que*

$$\sup_{t \geq 0} J_{\eta}\left(t\widetilde{u},\ t\widetilde{v}\right) < c^{*}$$

Proof.

Ce Lemme est vérifié en deux cas

1$^{\text{er}}$ **Cas**: $c^* = C := \eta^{\frac{2-N}{2}} \frac{(p(y)S)^{\frac{N}{2}}}{2N}$

Posons $u_{\varepsilon,x_0}(x) = \varphi(x)\, U_{\varepsilon,x_0}(x)$, où $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$ fonction plateau.

Par quelques estimations, on obtient

$$J_\eta\left(tu_{\varepsilon,x_0},\ tu_{\varepsilon,x_0}\right) \leq g(t) := t^2 \int_\Omega \left(p(x)\left|\nabla u_{\varepsilon,x_0}\right|^2 - \mu_1 u_{\varepsilon,x_0}^2\right) dx - \frac{2\eta t^{2^*}}{2^*} \int_\Omega$$

En combinant quelques estimations on aboutit au résultat.

2$^{\text{ème}}$**Cas**: $c^* = D := \frac{1}{N-2} \frac{p(y)}{(Q(y))^{N-2}} \left(\frac{1}{2_*} S_{\alpha,\beta}\right)^{N-1}$.

Posons $\widetilde{u} = \sqrt{\alpha}V_{\varepsilon,x_0}$, $\widetilde{v} = \sqrt{\beta}V_{\varepsilon,x_0}$ où $V_{\varepsilon,x_0} = \phi(x)\, W_{\varepsilon,x_0}(x)$,

$\phi \in C_0^\infty\left(B_\rho(x_0)\right)$ fonction plateau.

Par la même méthode que precedement on a boutit au résultat. $\square$

D'après les Lemmes 1 et 2 ,J_η satisfait toutes les hypothèses du Lemme du Col, il existe c qui est une valeur critique pour J_η et $(u,\ v)$ est la solution de notre système. Par le principe du maximum on montre que $u > 0$ et $v > 0$.

Existence de solution qui change de signe.

Nous considèrons les cas où μ_1 et μ_2 satisfait

$$\lambda_{k,p} < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_{k+1,p},$$

avec $\lambda_{k,p}$ est la valeur propre de $-\operatorname{div}\left(p\left(x\right)\nabla u\right)$ avec les conditions aux limites de Neumann dans $H^1\left(\Omega\right)$.

Le résultat principal est le suivant:

Theorem (2)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, *un domaine borné tel que* $\partial\Omega$ *satisfait la* $(c.g)$ *en* y *et* $H(y) > 0$.*Supposons que* $(\mathcal{A}_2)$ *est vérifiée,* p *et* Q *satisfont* $(1) - (3)$ *respectivement et si la condition suivante est vérifiée:*
Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\lambda_{k,p} < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1,p}$.
Alors, le système $\left(\mathcal{S}_{A,(\alpha,\beta)}^{(p,Q)}\right)$ *admet une solution.*

nous définissons les sous espaces H_k^- et H_k^+ par

$$H_k^- = span\left\{e_i, \ \ i = 1, ..., \ k\right\} \text{ et } H_k^+ = \left(H_k^-\right)^{\perp},$$

où e_1,..., e_k sont des fonctions propres correspondantes au valeurs propres $\lambda_{1,p}$,..., $\lambda_{k,p}$.

- Par le théorème de Linking, nous avons l'existence d'une suite $(u_n,v_n) \subset \left(H_k^-\right)^2$ de $\left(\text{P-S}\right)_c$.

Theorem (3)

Soit H un espace de Banach avec $H = H_k^- \oplus H_k^+$ où $\dim H_k^- < \infty$. Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_{k,p} < \mu_1 \leq \mu_2 < \lambda_{k+1,p}$ et $J_\eta \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfait les condition $(P-S)$ vérifie

(i) Il existe $\rho,\ \sigma > 0$ tel que $J_\eta(u,\ v) \geq \sigma$ pour tout $(u,\ v)\left(\partial B_\rho \cap H_k^+\right)^2$.

(ii) Il existe $R > \rho$ tel que $J_{\eta|_{\partial Q_\varepsilon}} \leq 0$, avec

$$Q_\varepsilon = \left(\left(\overline{B}_R \cap H_k^-\right) \oplus [0,\ R].\{w_\varepsilon\}\right) \times \left(\left(\overline{B}_R \cap H_k^-\right) \oplus [0,\ R].\{w_\varepsilon\}\right).$$

Theorem

Alors J_η *possède une valeur critique* c_ε*. De plus*

$$c_\varepsilon = \inf_{h\in\Gamma_\varepsilon} \max_{(u,\ v)\in Q_\varepsilon} J_\eta\left(h\left(u,\ v\right)\right), \text{ pour } \varepsilon > 0 \text{ petit}$$

avec

$$\Gamma_\varepsilon := \left\{h \in C\left(Q_\varepsilon, H\right) :\ h = Id \text{ sur } \partial Q_\varepsilon\right\}.$$

Démonstration

Lemma

Soit $(u_n, v_n) \subset H$ *une suite qui satisfait*

$$J_\eta(u_n, v_n) \rightarrow c < c^*$$

et

$$J'_\eta(u_n, v_n) \rightarrow 0 \text{ dans } H'.$$

Alors (u_n, v_n) *est relativement compacte dans* H.

Proof.

- Par absurde on montre que (u_n, v_n) est bornée dans H.

□

Démonstration

Lemma

Soit $(u_n,\, v_n) \subset H$ *une suite qui satisfait*

$$J_\eta\,(u_n,\, v_n) \to c < c^*$$

et

$$J'_\eta\,(u_n,\, v_n) \to 0 \text{ dans } H'.$$

Alors $(u_n,\, v_n)$ *est relativement compacte dans* H.

Proof.

- Par absurde on montre que $(u_n,\, v_n)$ est bornée dans H.
- Une application directe du principe de concentration-Compacité, nous prouvons $(u_n,\, v_n) \to (u,\, v)$ dans H.

□

Lemma

Sous les hypothèses du Théorème 2 et supposons que la condition suivante est satisfaite
Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\lambda_{k,p} < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_{k+1,p}.$$

nous avons

$$c_\varepsilon := \inf_{h \in \Gamma_\varepsilon} \max_{(u,v) \in Q_\varepsilon} J_\eta \left(h \left(u, v \right) \right) < c^*,$$

où Q_ε et Γ_ε sont définis comme dans le Théorème 3.

- Adimurthi and G. Mancini, Nonlinear analysis: A tribute in honour of G. Prodi. Pisa 9 (1991).
- C. O. Alves, D.C. de Morais, and Souto, Nonlinear Anal 42, 771 (2000)
- P. L. Lions, the limit case (I), 145 (1985)
- P. L. Lions, the limit case (II), 25 (1985)
- M. Bouchekif, Y. Hamzaoui. On the Neumann problem for an elliptic system with weights and multiple critical nonlinearities. Submitted, (2013)
- X. J. Wang, J. Differ, Equations 93, 283 (1991)
- H. Yazidi, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 137, 647 (2007)

MERCI DE VOTRE ATTENTION